

文章编号: 1000-7598 (2014) 05-1255-09

道路安定理论的进展及其应用

王 娟¹, 余海岁²

(1. 宁波诺丁汉大学 土木工程系, 浙江 宁波 315100; 2. 英国诺丁汉大学 岩土力学中心, 英国 诺丁汉 NG7 2RD)

摘 要: 30 多年来, 国际上的道路设计原理及方法逐渐从传统经验法向运用理论框架方面转变。但这些理论框架主要基于土和粒状材料的弹性假设, 从而限制了材料塑性性能的发挥。安定分析基于弹塑性理论, 可以确定结构在循环或变值荷载作用下的最大承载力, 因此, 能够被运用于道路承受交通荷载的问题。阐述了安定理论的概念以及两种经典安定定理, 回顾了道路安定分析方法的创始及发展过程, 包括与试验结果的比较, 讨论了残余应力在道路中的分布、两种求解道路安定荷载极限的方法, 以及与塑性极限分析的比较, 并把一种下限安定分析方法应用于多层柔性路面的设计, 最后展望了道路安定理论未来的发展方向。

关 键 词: 安定分析; 交通荷载; 柔性路面; Mohr-Coulomb 准则

中图分类号: U 416

文献标识码: A

Development and its application of shakedown theory for road pavements

WANG Juan¹, YU Hai-sui²

(1. Department of Civil Engineering, The University of Nottingham Ningbo, Ningbo, Zhejiang 315100, China;

2. Nottingham Centre for Geomechanics, The University of Nottingham, Nottingham, UK NG7 2RD)

Abstract: Over the last three decades, there has been a positive evolution in philosophy and practice from a wholly empirical approach to pavement design towards the use of a theoretical framework for design. However, this theoretical framework is mainly based on elasticity theory of soil and granular material behavior. A major limitation of this elastic analytical approach is that strength properties of pavement materials are not taken into account. Based on elastoplastic theory, shakedown analysis is able to provide maximum capacity of structures under cyclic loads; therefore it can be used as a theoretical basis for pavement design. This paper illustrates the shakedown theory and two classical shakedown theorems. Literature reviews summarize the origination and development of pavement shakedown studies, supported by experimental results. Residual stress distributions in pavements and two pavement shakedown solutions are discussed in detail and compared with limit analysis. A pavement design procedure using a lower bound shakedown solution is also presented; finally, the tendency of the pavement shakedown theory is predicted.

Key words: shakedown analysis; flexible pavement; traffic loads; Mohr-Coulomb criterion

1 引 言

在道路工程中, 路面结构与路基土作为一个层状系统共同承载着移动车辆荷载。其中, 柔性路面结构主要由沥青混合料层和碎石层组成, 其结构破坏通常与车辙和裂缝的累积有关^[1]。因此, 道路在长期交通荷载下的力学性能和响应行为一直备受学术界和工程界的关注。目前, 一方面国际上的柔性路面设计原理主要基于结构的力学性能^[2], 即控制

沥青层底的水平拉应变量和路基顶面的垂直压应变, 但计算这些应变的过程一般基于弹性理论, 从而无法发挥材料塑性性能的潜力, 并且不能够反映荷载移动的情况; 另一方面, 塑性极限分析常被运用于求解地基极限承载力, 却无法排除地基由于长期承受变值荷载或循环荷载而产生超大塑性变形的破坏, 如柔性路面的车辙现象。鉴于以上两点, 安定理论被引入到了柔性路面的结构设计中。安定分析考虑了结构的弹塑性行为, 并确保结构在具有一

收稿日期: 2013-02-04

基金项目: 英国工程及物理科学研究委员会资助项目 (No. GR/R83903/01); 国家建设高水平大学公派研究生项目 (留金出[2007]3020 号)。

第一作者简介: 王娟, 女, 1985 年生, 博士, 讲师, 主要从事岩土工程安定分析与数值模拟方面的研究。E-mail: juan.wang@nottingham.edu.cn

通讯作者: 余海岁, 男, 1964 年生, 博士, 教授, 英国皇家工程院院士, 主要从事岩土力学分析和计算、塑性和本构模型、岩土原位试验和道路岩土工程方面的研究工作。E-mail: hai-sui.yu@nottingham.ac.uk

定范围的变值荷载或循环荷载下稳定。它为寻找一个介于弹性极限和塑性极限之间的道路最大承载力提供了理论依据。

2 安定概念

一个弹塑性结构在变值荷载或循环荷载作用下可能会显示出如下 3 种不同的反应^[3]:

(1) 纯弹性行为

如果循环荷载足够小,以至于结构中没有任何的屈服点,结构应变完全恢复而没有任何塑性变形。

(2) 安定行为(或称为“弹性安定行为”)

如果循环荷载超过了屈服极限,却小于一个极限值,结构会在初始循环中产生一些塑性变形,但最终呈现纯弹性反应,即不再产生任何进一步的塑性变形,结构因此达到安定状态。此极限荷载值被称为“安定极限”。

(3) 塑性破坏行为

如果结构受到一个大于安定极限的循环荷载,其在每一个循环中总呈现塑性应变,以致于最后发生塑性循环破坏(结构因反复发生反向塑性应变而破坏)或塑性应变累积破坏(结构因塑性应变累积而破坏)。

安定理论应用的关键在于根据已知材料和荷载形式确定安定极限值,即安定荷载的最大值。如果变值荷载或循环荷载始终保持在此极限值以下,结构将处于稳定状态;反之,则最终破坏。

3 经典安定定理

安定极限值的确定通常是运用经典静力或者机动安定定理。这些定理基于理想弹塑性假设,通过寻找临界点或者破坏机制直接求解出安定极限值的下限或者上限,从而避免了运用数值弹塑性分析所带来的耗时等困难。通过安定定理求解结构理论安定极限值的过程也被称为安定分析。

3.1 静力安定定理

Melan^[4]于 1938 年提出了静力安定定理:如果能够找到一个自相平衡的残余应力场 σ_{ij}^r ,它与由外荷载所引起的弹性应力场共同构成一个处于屈服极限之内的应力系统,则结构是安定的。如果外部荷载用 λp 表示,其中 p 是单位荷载, λ 是无量纲因子,则静力安定理论可表示为

$$f(\lambda \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^r) \leq 0 \quad (1)$$

式中: $\lambda \sigma_{ij}^e$ 是由于外部静力荷载 λp 所产生的弹性应力场; $f(\sigma_{ij}) \leq 0$ 是材料的屈服准则。通过静力

安定定理可以计算出安定极限值的下限,因此,它也被称为下限安定定理。

3.2 机动安定定理

Koiter^[5]的机动安定定理认为:如果能够找到一个机动容许的塑性应变率循环 $\dot{\epsilon}_{ij}^k$,并且在给定的荷载范围内有下式,则结构不安定:

$$\int_0^T dt \iint_{S_T} T_{0i} \dot{u}_i^k dS > \int_0^T dt \iiint_V \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV \quad (2)$$

式中: T_{0i} 为表面 S_T 上的以时间 T 为周期的循环的一组外力; $\dot{u}_i^k$ 为对应于 $\dot{\epsilon}_{ij}^k$ 的速度场; σ_{ij}^k 为对应于 $\dot{\epsilon}_{ij}^k$ 的应力场。

机动安定定理也可以被表达为,若要结构安定,则所有机动容许的塑性应变率循环 $\dot{\epsilon}_{ij}^k$ 都满足(不考虑体力的情况下):

$$\lambda_{sd} \int_0^T dt \iint_{S_T} p_{0i} \dot{u}_i^k dS \leq \int_0^T dt \iiint_V \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV \quad (3)$$

式中: p_{0i} 为单位荷载; λ_{sd} 为安定荷载的无量纲因子。通过机动安定定理可以计算出安定极限值的上限,因此,它也被称为上限安定定理。

4 道路安定研究的历史回顾

早在 1962 年,Johnson^[6]已经利用静力安定定理求解出一个 Tresca 半空间无限体在移动竖向赫兹荷载作用下的安定极限。这个安定极限是 Tresca 材料黏聚力的倍数,因此,被表达成为一个无量纲安定系数: $\lambda_{sd} p_0 / c = 4.0$ (p_0 为赫兹荷载分布中的最大单位压力, c 为材料黏聚力)。随后,Johnson 等^[7]假设切向荷载与竖向荷载成正比,发现安定系数随着切向力的增加而减小。

1984 年,Sharp 等^[8]正式把安定理论引入到了道路工程领域。他们研究了美国各州公路工作者协会(AASHTO)实验路的观测资料^[9],发现对于其中一些受到较小车辆荷载的路面,其服务功能指数随着荷载循环次数的增加而减小,但最终达到稳定状态。他们把道路问题简化为一种二维平面应变问题(见图 1),即假设一个无限长圆筒滚过路面,并用一个梯形分布荷载代表路面与圆筒之间的接触力。图 1 中, P 和 Q 分别代表路面所受到的竖向力和切向力。通过运用静力安定定理以及圆锥截面法(method of conic section)对 Mohr-Coulomb 材料在循环移动荷载下的变形趋势问题进行安定分析,即求解安定极限。他们比较了计算所得安定极限和 AASHTO 试验的观测数据,发现安定分析或能预测实验道路的变形趋势。随后,很多学者运用静力安

定定理和道路二维简化模型对柔性路面的安定行为进行了研究。Raad 等^[10]提出了一种基于有限元法的优化程序用于求解安定极限。他们以及其随后的研究者^[10-12]着重研究了软硬地基和温度变化对柔性路面特别是沥青混凝土路面的安定极限的影响。Krabbenhoft 等^[13]和 Zhao 等^[14]通过扫描可能的残余应力求解出二维半空间无限体的安定极限下限,并研究了不同荷载分布对安定解的影响。Yu 等^[15]采用应力边界元求解残余应力,同时把 Mohr-Coulomb 屈服准则近似为多个线性方程,从而把道路安定问题转换为一个线性优化方程。随后,Shiau 等^[16]引入了 Capurso 的位移边界理论以求解路面在安定状态下的变形大小。Shiau^[17]也试图把此方法应用于三维模型中,却因为导入了庞大的矩阵而使计算难以进行或得不到精确度比较高的安定解。直到最近, Yu 等^[18-19]给出了 Mohr-Coulomb 半空间无限体在三维赫兹荷载情况下(见图 2)的安定荷载解析公式。

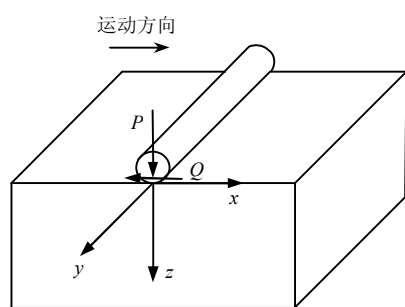


图 1 道路二维理想模型

Fig.1 Idealized two-dimensional pavement model

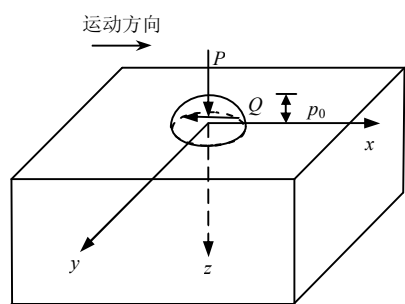


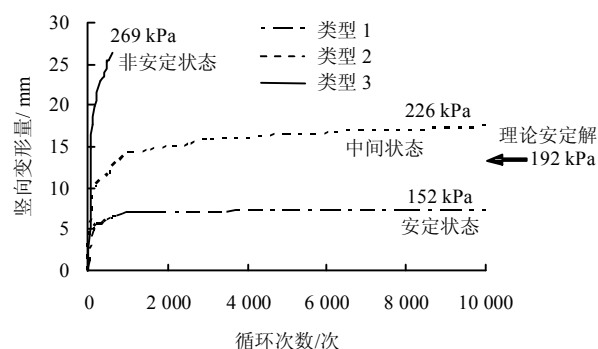
图 2 道路三维理想模型

Fig.2 Idealized three-dimensional pavement model

另一方面,基于机动安定定理, Ponter 等^[20]首先研究了三维赫兹荷载作用下 Tesca 半空间无限体可能的破坏机制,并给出了上限安定解。Collins 等^[21]采用标准 Mohr-Coulomb 材料(内摩擦角等于剪胀角),假设二维简化模型的破坏机制为表面下材料水平向上滑移,从而得到了二维情况下的上限安定解。对于三维情况,他们以及其随后的研究者^[21-22]

同样假设表面下材料在 V 形槽中水平滑移,并考虑了几种在横截面上的车辙破坏机制。但这些车辙破坏机制是基于平面应变的考虑,因此,不是真正意义上的三维变形模式。Li 等^[23]利用一种非线性优化技术和有限元方法求解出了二维上限安定值, Li^[24]进一步引入了非关联流动法则。Ponter 等^[25]首先把线性匹配法(linear matching method)运用到了安定分析中。随后, Boulbibane 等^[26]采用 Drucker-Prager 屈服准则和道路三维简化模型,把线性分配法引入到道路的安定分析中,并考虑了非关联流动法则。

试验方面, Ravindra^[27]采用悉尼大学的道路测试仪器研究了一个双层体系(第 1 层为再生混凝土碎石,第 2 层为砂土层)在循环车载作用下的响应状态。他们通过固定荷载大小变动碎石层厚度,得到当碎石层厚较大时(≥ 200 mm),车辙深度在 10 000 个循环后基本达到稳定,即安定状态;反之,结构很快破坏。Juspi^[28]在英国诺丁汉大学进行了一系列的道路试验,包括单层结构和多层结构在不同单轮荷载下的响应分析,试验材料包括花岗岩碎石、石灰石碎石、砂土、粉砂、黏土,循环次数最多达到 100 000 个循环。Brown 等^[29]比较了这些路面响应状态与通过 Yu^[18]的理论计算出的安定荷载极限,如图 3 所示。其中,类型 1 为竖向变形率在 1 000 次循环后小于或等于 0.001 mm/循环的情况;类型 3 为竖向变形率在 500 次循环后大于 0.018 mm/循环的情况;两种类型之间的情况为类型 2。结果显示,安定理论可以在一定程度上预测路面长期循环车载下的响应行为,因此,对于预防车辙具有重大意义。

图 3 试验结果与理论安定解的比较^[29]Fig.3 Comparison between experimental observation and theoretical shakedown solution^[29]

5 道路中的残余应力

残余应力是结构在卸载后由于塑性变形而残存在结构中的应力。在循环荷载作用的情况下,这个应力可能会使结构趋于稳定,但也有可能无法阻止

结构由于持续发生塑性变形而产生的破坏。值得注意的是,道路中残余应力的分布与循环荷载作用下地基中的残余应力分布有本质上的区别。以二维平面应变情况为例,道路在移动车载作用后只剩下水平残余应力(见图 4(a), φ 为材料内摩擦角, z 为理想模型中的深度; a 为滚筒与路基之间在运动方向上的接触长度),但地基在多个循环荷载作用后仍然存在着水平残余应力、竖向残余应力和剪切残余应力。也就是说,道路中的残余应力不能通过单纯施加循环荷载而得出。

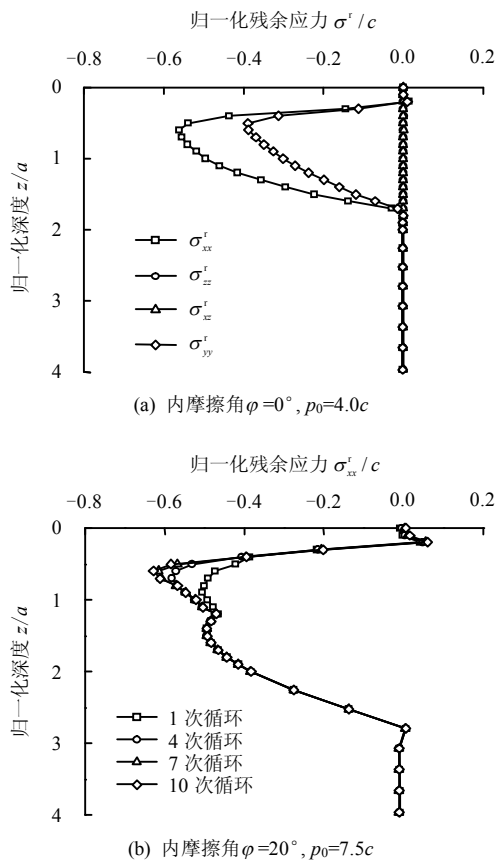


图 4 Mohr-Coulomb 半空间无限体中的残余应力分布^[30]

Fig.4 Residual stress distribution in Mohr-Coulomb half-space^[30]

Wang 等^[30]采用有限元方法对 Mohr-Coulomb 二维半空间无限体在循环移动荷载作用后的残余应力分布进行了系统研究。研究表明,当移动荷载作用后,结构中只剩下水平残余应力,并且它们不随坐标 x 值变化。当荷载小于安定极限时,这些残余应力朝着有利于结构稳定的方向发展(如图 4(b)所示),最终使结构的总应力状态重回弹性屈服面之内,从而使结构达到安定状态;当荷载大于安定极限时,残余应力也会随着循环次数的增加而发展并达到稳定,但它无法阻止结构继续产生塑性变形。

Radovsky 等^[31]测取了一段试验路基土在滚筒滚过之后的残余应力。试验发现,水平方向上的残余应力随着循环次数的增加而增长,直至第 12 个循环。最终,残余应力的最大值(见图 4)发生在表面以下 $0.52a$ 。这与有限元结果基本吻合。

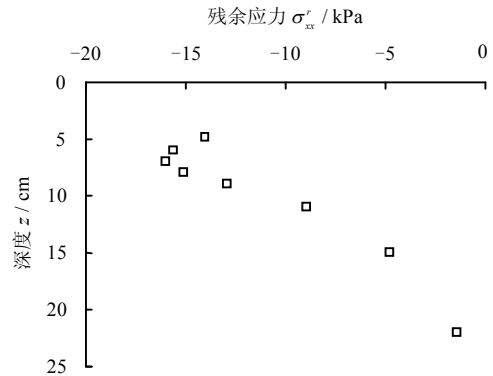


图 5 试验路基土中残余应力分布^[31]

Fig.5 Residual stress distribution in experimental soils^[31]

6 安定分析方法

6.1 一种下限安定分析

通过静力安定定理求出的下限安定解等于或小于精确安定解,因此,相对于上限安定解来说更加安全,也更有利于其在工程中的运用。此处介绍了一种最新的下限安定分析方法。

由静力安定定理可知,求解下限安定极限的关键在于构造出一个自相平衡的残余应力场。这个残余应力场越接近于真实情况,则得到的安定解越准确。但真实情况下的残余应力场因为加载历史的影响可以有无数种情况。假设路基土和粒状材料可以用 Mohr-Coulomb 模型模拟,且极限平面为 xz 平面^[18]。通过静力安定定理可知,总应力场必须满足如下条件才能使结构达到安定状态:

$$\left. \begin{aligned} f &= (\sigma'_{xx} + M)^2 + N \leq 0 \\ M &= \lambda \sigma'_{xx} - \lambda \sigma'_{zz} + 2 \tan \varphi (c - \lambda \sigma'_{zz} \tan \varphi) \\ N &= 4(1 + \tan^2 \varphi) \left[(\lambda \sigma'_{xz})^2 - (c - \lambda \sigma'_{zz} \tan \varphi)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中:残余应力 σ'_{xx} 必须自相平衡,即在任意深度 $z = j$, 其必须满足以下范围^[32]:

$$\max_{z=j} (-M_i - \sqrt{-N_i}) \leq \sigma'_{xx} \leq \min_{z=j} (-M_i + \sqrt{-N_i}) \quad (5)$$

式中: i 为深度 $z = j$ 上的任意一点; σ'_{ij} 为弹性应力。

采用任一残余应力范围极限,并把它代入到式(4)中,道路安定问题则被简化为一个由弹性应力分布 $\lambda \sigma^e$ 决定的优化方程:

$$\left. \begin{aligned} & \text{maximise } \lambda, \\ & \text{subject to} \\ & f(\sigma_{xx}^r(\lambda\sigma^e), \lambda\sigma^e) \leq 0 \\ & \sigma_{xx}^r(\lambda\sigma^e) = \min_{z=j}(-M_i + \sqrt{-N_i}) \text{ 或} \\ & \text{or } \sigma_{xx}^r(\lambda\sigma^e) = \max_{z=j}(-M_i - \sqrt{-N_i}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: σ^e 为 p_0 所产生的弹性应力场。通过搜索满足屈服准则 $f \leq 0$ 的最大的荷载因子 λ_{sd} , 可以得到安定极限荷载 $\lambda_{sd} p_0$ 以及其临界点 (f 值最大的点) 的位置。

Yu 等^[19]提供了在均质半空面无限体中搜索最大荷载因子的方法, 并给出了其在赫兹荷载情况下的安定解解析公式。假设切向力与竖向力成比例增长, 即 $\mu = Q/P$, 安定极限荷载可以被表示为一个无量纲安定乘子: $k_{\max} = \lambda_{sd} p_0 / c$ 。

二维赫兹荷载作用下的安定乘子可表示为以下两种情况。

(1) 当临界点发生在表面以下(切向力较小)时, 有

$$k_{\max} = \frac{c}{\max(|\sigma_{xz}^e| + \sigma_{zz}^e \tan \varphi)} \quad (7)$$

(2) 当临界点发生在表面(切向力较大)时, 有

$$k_{\max} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}{\mu} \quad (8)$$

三维(圆形接触面)赫兹荷载作用下的安定乘子可表示以下两种情况。

(1) 当临界点发生在表面以下(切向力较小)或 $\varphi = 0^\circ$ 时, 有

$$k_{\max} = \frac{c}{\max(|\sigma_{xz}^e| + \sigma_{zz}^e \tan \varphi)} \quad (9)$$

(2) 当临界点发生在表面(切向力较大)且 $\varphi \geq 10^\circ$ 时, 有

$$k_{\max} = \frac{16\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}{\mu(\nu + 4)\pi} \quad (10)$$

式中: ν 为泊松比。其他情况下的安定乘子介于式(9)和式(10)之间。

图6比较了二维情况下的理论极限残余应力与通过有限元方法计算出的残余应力。其证明了真实残余应力介于两个极限残余应力之间, 即与式(5)吻合。

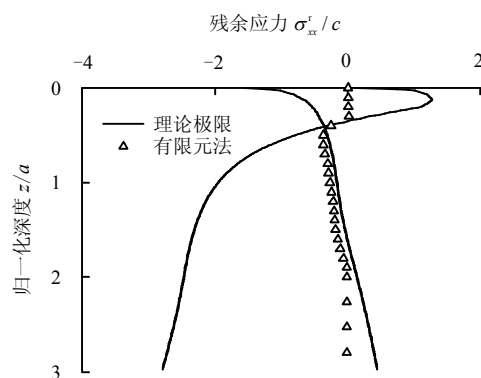


图6 残余应力分布的比较($\mu=0.1$, $\varphi=20^\circ$, $k_{\max}=6.46$)

Fig.6 Comparison of residual stress fields ($\mu=0.1$, $\varphi=20^\circ$, $k_{\max}=6.46$)

6.2 一种上限安定分析

通过机动安定定理求出的上限安定解等于或大于精确安定解。此处介绍一种利用非线性优化技术的上限安定分析方法。

根据虚功原理, 式(3)可表达为

$$\lambda_{sd} \int_0^T dt \iiint_V \sigma_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^k dV \leq \int_0^T dt \iiint_V \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV \quad (10)$$

其可以被简化为以下优化方程:

$$\left. \begin{aligned} & \text{minimise } \lambda = \int_0^T dt \iiint_V \sigma_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^k dV, \\ & \text{subject to} \\ & \int_0^T dt \iiint_V \sigma_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^k dV = 1 \\ & \Delta \epsilon_{ij}^p = \int_0^T \dot{\epsilon}_{ij}^k dt = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \text{ in } V \\ & \Delta u_i = \int_0^T \dot{u}_i dt \text{ in } V \\ & \Delta u_i = 0 \text{ in } S_T \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: $\Delta \epsilon_{ij}^p$ 和 Δu_i 分别为一次循环荷载后的累计塑性应变场和位移场。

式(11)中求解时间积分的困难可以通过假设一个凸线性荷载空间且考虑有限种通过荷载空间顶点的加载情况而解决。利用有限元求解塑性应变场和位移场, 式(11)可以表示为一个离散的非线性优化方程^[3]:

$$\left. \begin{aligned} & \lambda_{sd} = \min \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^u w_r |J|_r \left[\frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_{kr}^p)^T X^{-1} \epsilon_{kr}^p} (4 + Y^T X^{-1} Y) - \frac{1}{2} (\epsilon_{kr}^p)^T X^{-1} Y \right] \\ & \text{subject to} \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^u w_r |J|_r (\sigma_{kr}^e)^T \epsilon_{kr}^p = 1 \\ & \Delta \epsilon_r^p = \sum_{k=1}^l \epsilon_{kr}^p = B_r \Delta \delta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中: $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 均是关于材料系数的矩阵; k 为力域的顶点数 ($k=1, 2 \cdots, l$); r 为高斯积分点数 ($r=1, 2 \cdots, u$); w_r 为高斯积分权重; $|\mathbf{J}|_r$ 为雅可比行列式; $\boldsymbol{\sigma}_{kr}^e$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{kr}^p$ 分别为特定外力 T_{0i} 所产生的弹性应力场和塑性应变场; $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^p$ 为一次循环后的累积塑性应变; $\Delta \boldsymbol{\delta}$ 为一次循环后节点的累积速度向量; $\mathbf{B}_r$ 为应变-速度矩阵。

通过搜索满足条件的最小的荷载因子 λ_{sd} , 可以得到安定极限荷载 $\lambda_{sd} p_{0i}$ 。相比下限安定解, 上限安定解需要利用有限元求解塑性应变场和位移场, 因此, 实现起来较为复杂。另外, 上限安定分析中所假设的极限破坏情况在道路工程问题中的代表性值得进一步研究。

7 安定极限和塑性极限的比较

实际上, 早在 1951 年 Hill 等^[33]提出塑性极限分析理论之前, Melan^[4]已于 1938 年提出了适用范围更广的静力安定理论。从理论上讲, 塑性极限分析只能适用于比例加载情况, 而安定分析则能考虑荷载在一定的范围内以任意的路径进行变化。因此, 极限分析是安定分析的一种特例。当塑性极限分析常被用于地基在比例加载下极限承载力的问题时, 安定分析对道路工程中的循环移动荷载这样的问题则更为合理。

图 7 比较了地基在三维移动赫兹荷载作用下的安定极限、地基在三维静止赫兹荷载作用下的弹性极限以及 Cox 等^[34]的地基在静止圆柱体作用下的塑性极限。由图可见, 安定极限位于弹性极限和塑性极限之间, 且随着材料内摩擦角的增大而增加, 其变化幅度明显小于塑性极限却接近于弹性极限。因此, 道路工程中的设计荷载应考虑安定极限荷载而不是塑性极限荷载。

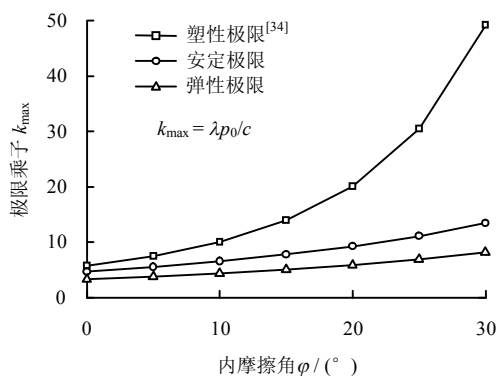


图 7 弹性极限、安定极限、塑性极限的比较($\mu=0$)

Fig.7 Comparison between elastic, shakedown and plastic limits ($\mu=0$)

8 安定极限在道路工程中的运用

上述两种安定分析方法仅用于求解半空间无限体在循环移动荷载下的安定解, 实际上道路是一个层状结构, 每一层的材料性质都与其他层不同。此处以下限安定分析为例, 介绍求解道路安定极限的具体步骤。

在这样一个层状结构中, 弹性应力的分布因为每一层材料性质的差异以及材料厚度的变化而不同。此外, 值得一提的是, 在两层材料的交界处, 由于材料性质的突变, 极限残余应力也会突变, 因而在交界处存在两个不同的荷载因子, 对应于不同的材料层。为了方便确定最大荷载因子所属材料层 (即临界点所属材料层), 笔者把结构进行分层研究。求解道路安定极限的步骤如下:

(1) 确定每一层材料的 E_n 、 ν_n 、 c_n 、 φ_n 值 (n 为层数; $n=1, 2 \cdots, m$), 用有限元等方法求出弹性应力场。

(2) 采用第 n 层的材料参数和弹性应力场, 通过式 (6) 求出第 n 层的安定极限 $\lambda_{sd}^n p_0$ 。

(3) 重复步骤 (2), 直至求出每一层的安定极限 $\lambda_{sd}^1 p_0, \lambda_{sd}^2 p_0, \cdots, \lambda_{sd}^m p_0$ 。

(4) 此层状道路的安定极限应为所有安定极限的最小值, 即

$$\lambda_{sd} p_0 = \min(\lambda_{sd}^1 p_0, \lambda_{sd}^2 p_0, \cdots, \lambda_{sd}^m p_0) \quad (13)$$

图 8 显示了弹性模量比和材料凝聚力比对于一个双层结构的安定极限乘子 $k_{\max} = \lambda_{sd} p_0 / c_2$ 的影响。对于一定的材料凝聚力比, 安定极限随着弹性模量比的变化而变化, 且存在一个峰值。峰值之前的安定极限由路基顶面上的临界点决定, 峰值之后的安定极限由面层中的临界点决定。相比传统经验法, 采用安定理论进行路面设计的优点在于, 可以通过选取不同材料而达到道路设计强度要求。

对于一个 3 层结构 (见图 9), 安定理论可以用于确定最佳层厚。其步骤如下:

(1) 确定接触面大小、荷载分布和每一层材料的 E_n 、 ν_n 、 c_n 、 φ_n 值, 用有限元等方法求出弹性应力场。

(2) 计算不同层厚组合 (h_1, h_2) 的道路的安定极限 $\lambda_{sd} p_0$ 。安定极限也可以用平均荷载 $\bar{p} = P / \pi a^2$ 表示, 即 $\lambda_{sd} \bar{p} = (2/3) \lambda_{sd} p_0$ 。

(3) 画出云图, 如图 9 所示。

(4) 根据设计荷载 (如 750 kPa) 选取可能的层厚组合。

(5) 考虑经济因素等确定最佳层厚组合。

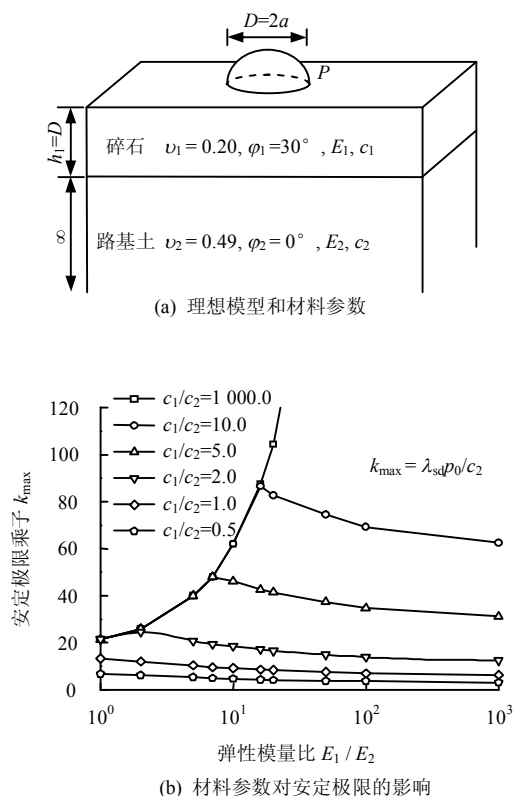


图8 弹性模量比和材料凝聚力比对安定极限的影响
Fig.8 Influences of stiffness ratio and cohesion ratio on dimensionless shakedown limit

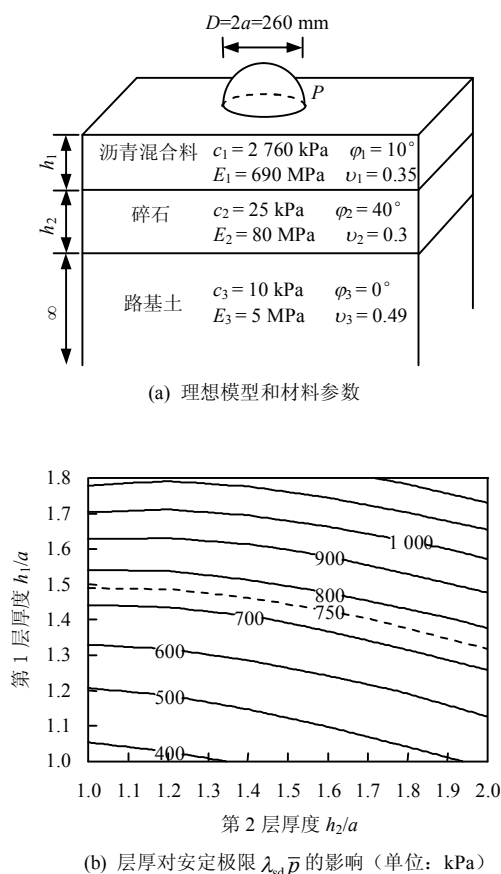


图9 设计图例
Fig.9 Example of design chart

9 道路安定理论的发展机遇与挑战

安定分析方法充分利用了材料的强度性能,为获取更准确的道路承载力提供了理论依据。采用安定极限为设计荷载的柔性路面能够在长期交通荷载作用下进入安定状态,从而使道路永久变形量保持在一个很小的范围,避免了由于车辙累积等造成的破坏。对于层状道路结构,通过安定分析可以比较不同材料组合以及层厚组合对道路承载力的影响,因此,为引入新型路面材料提供了方便。

预计在未来道路安定理论的研究中,应主要关注以下几个方面的工作:

(1) 现有的道路安定分析方法都是基于经典安定定理,而这些定理假设材料为理想弹塑性,因此,不能如实反映土和粒状材料在荷载作用下变实加密的情况。所以,以后的研究应朝着顾及材料固有本质的方向发展,如材料形变硬化对安定解的影响。

(2) 目前,基于安定理论的循环移动荷载道路试验均采用土和粒状材料,但实际中的柔性路面往往以沥青混合料作为面层。关于沥青路面在试验条件下的响应状况与理论安定荷载的比较需进行深入的研究。值得一提的是,对于道路车辙问题,除了少数试验采用循环移动荷载^[27-29],很多试验局限于重复荷载情况,因此,不能反映车辆荷载移动的本质。已有研究表明^[35],当荷载大小一样时,结构在循环移动荷载作用下的响应状况与其在重复荷载作用下的响应状况有明显的区别。

(3) 道路安定理论可以推广至高速铁路路基设计。铁路路基结构与道路相似,而其工后沉降的一大因素则是由于基床在列车荷载作用下产生的累积变形。铁路路基的沉降量大小直接影响到列车运行中的舒适度和安全性。在高速铁路蓬勃发展的今天,安定分析为控制铁路路基沉降量提供了新的思路。

参考文献

- [1] BROWN S F. 36th Rankine lecture: soil mechanics in pavement engineering[J]. *Géotechnique*, 1996, 46(3): 381-426.
- [2] BROWN S F, BRUNTON J M, STOCK A F. Analytical design of bituminous pavements[J]. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 1985, 79(1): 1-31.
- [3] YU H S. Plasticity and geotechnics[M]. New York: Springer, 2006.
- [4] MELAN E. Der Spannungszustand eines Henky-Miseschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung[J]. *Sitzungsberichte der Ak Wissenschaften Wie (Ser. 2A)*,

- 1938, 147: 73.
- [5] KOITER W T. General theorems for elastic-plastic solids[M]//Progress in Solid Mechanics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960.
- [6] JOHNSON K L. A shakedown limit in rolling contact[C]//Proceedings of the Fourth US National Congress of Applied Mechanics. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1962: 971—975.
- [7] JOHNSON K L, JEFFERIS J A. Plastic flow and residual stresses in rolling and sliding contact[J]// **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, 1963, 177: 54—65.
- [8] SHARP R W, BOOKER J R. Shakedown of pavements under moving surface loads[J]. **Journal of Transportation Engineering, ASCE**, 1984, 110(1): 1—14.
- [9] American Association of State Highway Officials (AASHO). The AASHO Road Test, Special Report 61 (7 reports, A-G)[R]. Washington D C: National Academy of Science—National Research Council, 1961.
- [10] RAAD L, WEICHERT D, NAJM W. Stability of multilayer systems under repeated loads[J]. **Transportation Research Record**, 1988, 1207: 181—186.
- [11] RAAD L, WEICHERT D, HAIDAR A. Analysis of full-depth asphalt concrete pavements using shakedown theory[J]. **Transportation Research Record**, 1989, 1227: 53—65.
- [12] RAAD L, MINASSIAN G. The influence of granular base characteristics on upper bound shakedown of pavement structures: Shakedown theory[J]. **Road Materials and Pavement Design**, 2005, 6(1): 53—79.
- [13] KRABBENHØFT K, LYAMIN A V, SLOAN S W. Shakedown of a cohesive-frictional half-space subjected to rolling and sliding contact[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2007, 44(11—12): 3998—4008.
- [14] ZHAO J, SLOAN S W, LYAMIN A V, et al. Bounds for shakedown of cohesive-frictional materials under moving surface loads[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2008, 45(11—12): 3290—3312.
- [15] YU H S, HOSSAIN M Z. Lower bound shakedown analysis of layered pavements using discontinuous stress fields[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1998, 167(3—4): 209—222.
- [16] SHIAU S H, YU H S. Load and displacement prediction for shakedown analysis of layered pavements[J]. **Transportation Research Record**, 2000, 1730: 117—124.
- [17] SHIAU S H. Numerical methods for shakedown analysis of pavements under moving surface loads[D]. Newcastle: University of Newcastle, 2001.
- [18] YU H S. Three-dimensional analytical solutions for shakedown of cohesive-frictional materials under moving surface loads[J]. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science**, 2005, 461(2059): 1951—1964.
- [19] YU H S, WANG J. Three-dimensional shakedown solutions for cohesive-frictional materials under moving surface loads[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2012, 49(26): 3797—3807.
- [20] PONTER A R S, HEARLE A D, JOHNSON K L. Application of the kinematical shakedown theorem to rolling and sliding point contacts[J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1985, 33(4): 339—362.
- [21] COLLINS I F, CLIFFE P F. Shakedown in frictional materials under moving surface loads[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1987, 11(4): 409—420.
- [22] COLLINS I F, WANG A P, SAUNDERS L R. Shakedown in layered pavements under moving surface loads[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1993, 17(3): 165—174.
- [23] LI H X, YU H S. A nonlinear programming approach to kinematic shakedown analysis of frictional materials[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2006, 43(21): 6594—6614.
- [24] LI H X. Kinematic shakedown analysis under a general yield condition with non-associated plastic flow[J]. **International Journal of Mechanical Sciences**, 2010, 52(1): 1—12.
- [25] PONTER A R S, ENGELHARDT M. Shakedown limits for a general yield condition: Implementation and application for a Von Mises yield condition[J]. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, 2000, 19(3): 423—445.
- [26] BOULBIBANE M, COLLINS I F, PONTER A R S, et al. Shakedown of unbound pavements[J]. **International Journal of Road Materials and Pavement Design**, 2005, 6(1): 81—96.